



ST. FRANCIS XAVIER
UNIVERSITY

CSCI-564

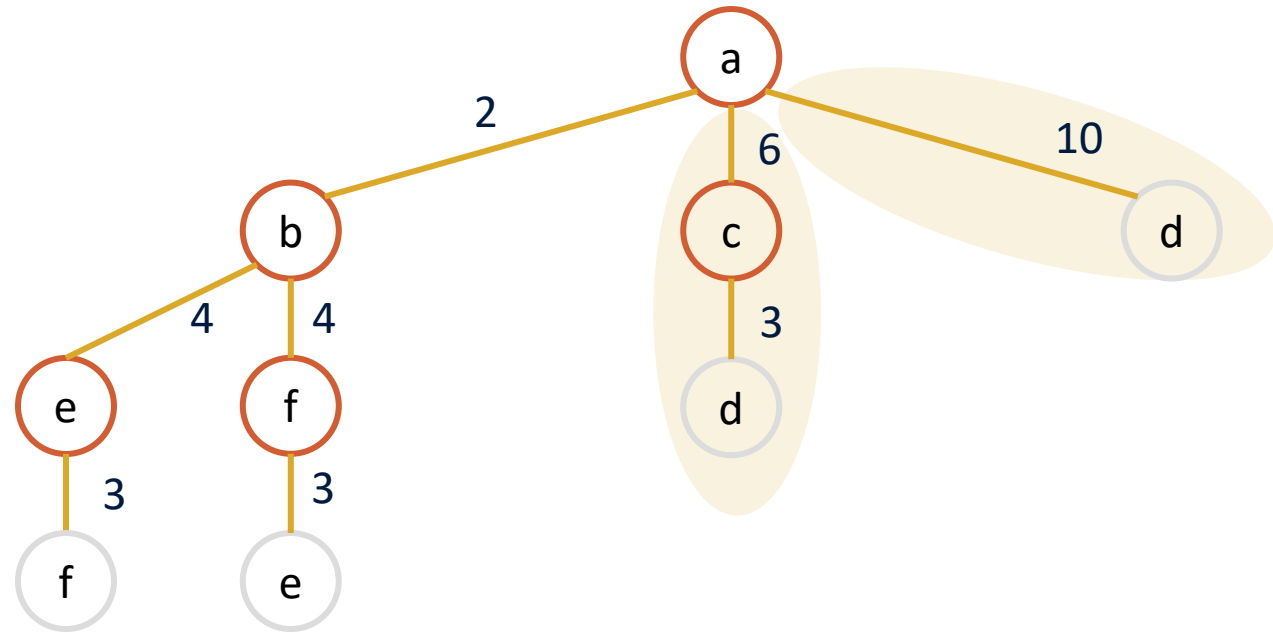
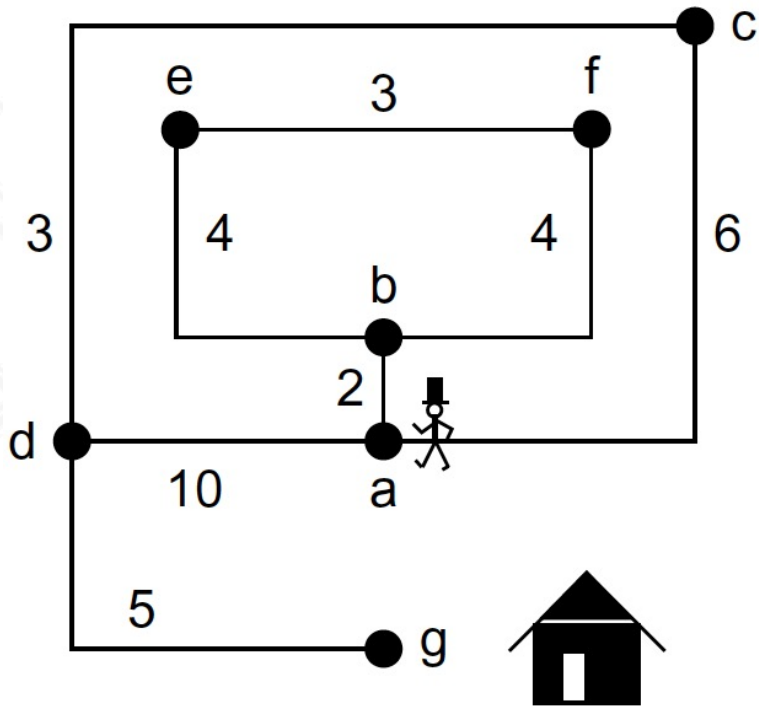
Constraint Processing and Heuristic Search

Lecture 5 – Uninformed Search (continued)



Dijkstra Algorithm

- The Dijkstra algorithm update the shortest path to reach one node.



We called it node relaxation.





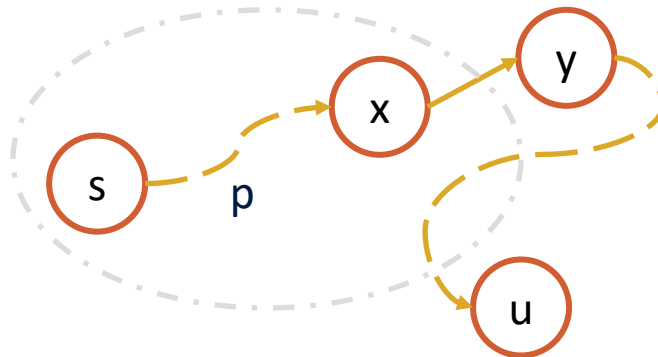
Dijkstra Algorithm

- **Lemma (Optimal node selection):**

- Let $G = (V, E, w)$ be a positively weighted graph and f be the approximation of $\delta(u, v)$ in Dijkstra's algorithm. At the time u is selected in the algorithm we have $f = \delta(s, u)$.

- **Proof:**

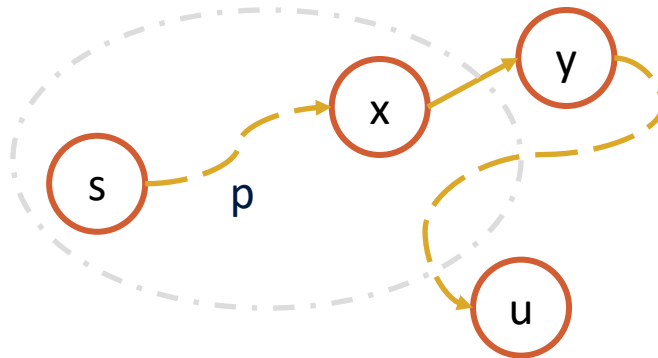
- Assume the contrary and let u be the first selected with $f(u) > \delta(s, u)$.
- Let $(s, \dots, x, y, \dots, u)$ be the shortest path for u , with y being the first node not expanded.



Dijkstra Algorithm

- **Proof:**

- Assume the contrary and let u be the first selected with $f(u) > \delta(s, u)$.
- Let $(s, \dots, x, y, \dots, u)$ be the shortest path for u , with y being the first node not expanded.
- Then $f(x) = \delta(s, x)$, since $x \in \text{Closed}$ given the minimality of u
- Hence, $f(y) \leq f(x) + w(x, y) = \delta(s, x) + w(x, y) = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) < f(u)$





Dijkstra Algorithm

- **Theorem (Correctness Dijkstra's Algorithm):**
 - In weighted graphs with nonnegative weight function the algorithm of Dijkstra's algorithm is optimal; that is, at the first node $t \in T$ that is selected for expansion, we have $f(t) = \delta(s, T)$.
- **Proof:**
 - With nonnegative edge weights, for each pair (u, v) with $v \in Succ(u)$ we always have $f(u) \leq f(v)$.
 - Therefore, the values f for selected nodes are monotonically increasing.
 - At the first selected node $t \in T$ we have $f(t) = \delta(s, t) = \delta(s, T)$.





Dijkstra Algorithm

- **Theorem (Correctness Dijkstra's Algorithm):**
 - In weighted graphs with nonnegative weight function the algorithm of Dijkstra's algorithm is optimal; that is, at the first node $t \in T$ that is selected for expansion, we have $f(t) = \delta(s, T)$.
- **Proof:**
 - With nonnegative edge weights, for each pair (u, v) with $v \in Succ(u)$ we always have $f(u) \leq f(v)$.
 - Therefore, the values f for selected nodes are monotonically increasing.
 - At the first selected node $t \in T$ we have $f(t) = \delta(s, t) = \delta(s, T)$.

The complexity is $O(|V|^2)$





Relaxed node selection

- Dijkstra is bound to expand an *Open* node with minimum f -value.
- Dijkstra find an optimal solution.

Is it all? Is the best search algorithm?





Relaxed node selection

- Sometimes, other criteria are better suited to find a solution.
 - In path finding in a large map
 - It can be better to explore neighboring streets
- We will come back later on this point.





Dynamic Programming

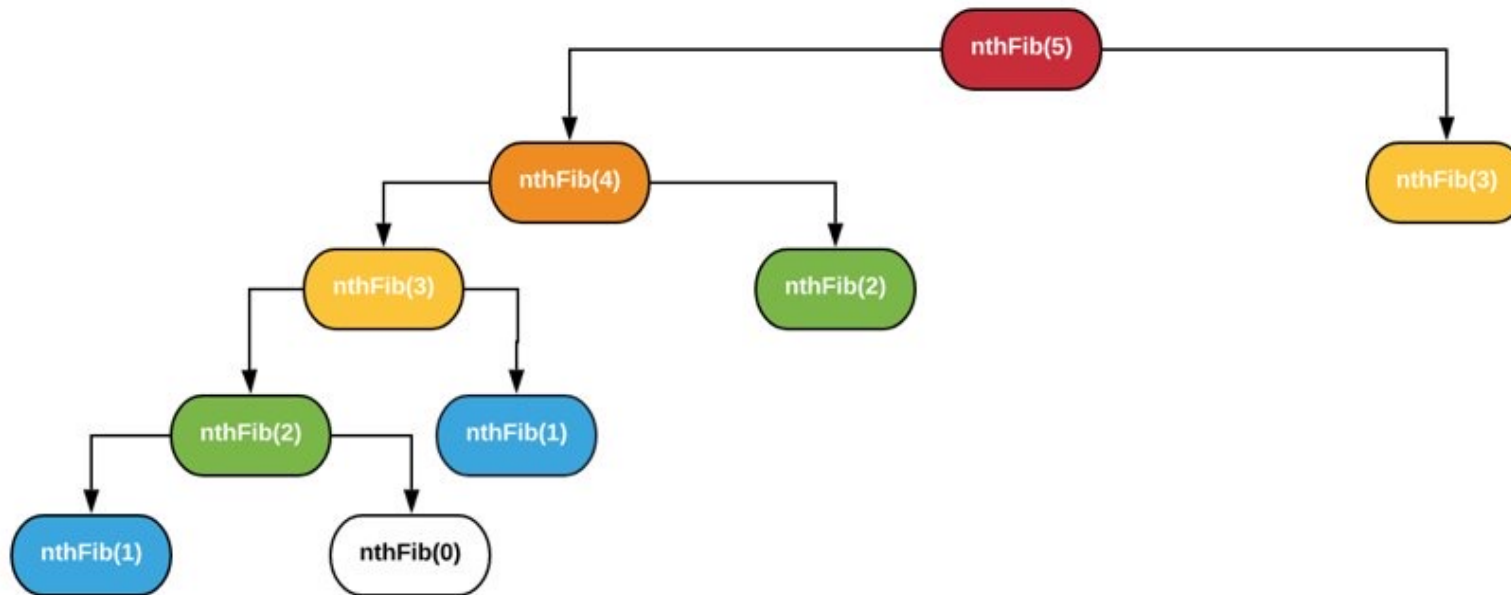
- **Divide-and-conquer**
 - Divide-and-conquer strategy in algorithm design suggests to solve a problem recursively by splitting it into smaller subproblems.
 - Solving each subproblem separately.
 - Then combining the partial results into an overall solution.
- **Dynamic Programming**
 - Rather than solving overlapping problems again and again, solve each subproblem only once and record the results in a table.
 - This simple idea can easily transform exponential-time algorithms into polynomial-time algorithms





Dynamic Programming

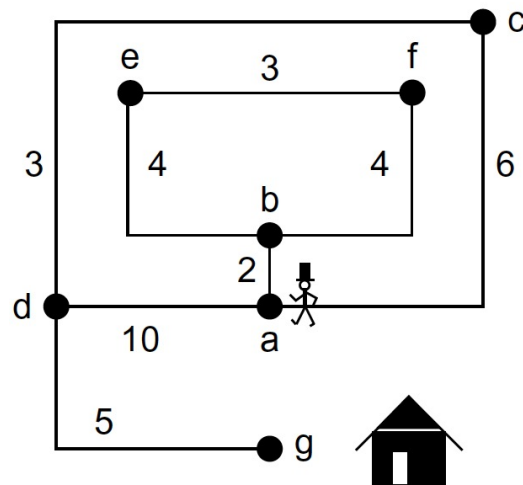
- We can cache the results of the repeated work. Here's what our tree would look like if we could eliminate these repeat calculations.





Dynamic Programming: Shortest Path

- The previous search algorithms start from a source node s
- The problem is that they traverse the graph several times.
- A better solution is to calculate all the optimal paths.
- All distances are stored in a matrix D , where element $D_{i,j}$ is the shortest path cost between i and j .



Optimal paths:

- (a,g)
- (a,e)
- ...
- (g,c)





Dynamic Programming: Shortest Path

- According to the principle of optimality we obtain:

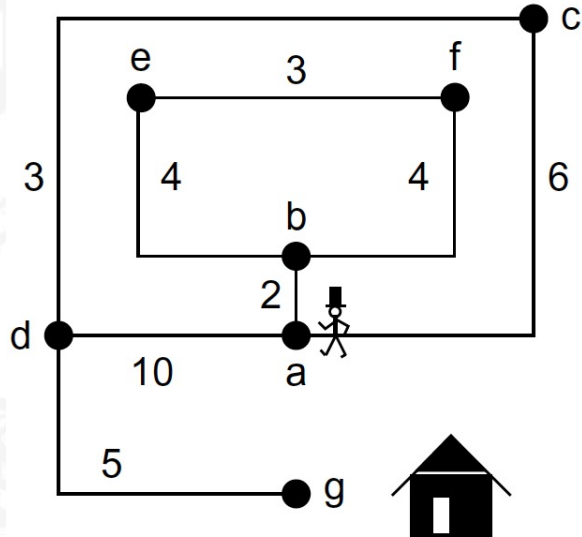
$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

```
Procedure Floyd-Warshall{
  Init D
  foreach k in {1,...,n}:
    foreach i in {1,...,n}:
      foreach j in {1,...,n}:
         $D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$ 
}
```





Dynamic Programming: Shortest Path



		j							
		a	b	c	d	e	f	g	
i	k=0	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞	
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞	
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5	
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞	
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞	
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0	

$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

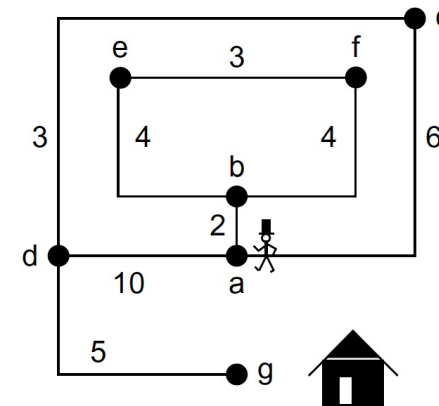




Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0

$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$



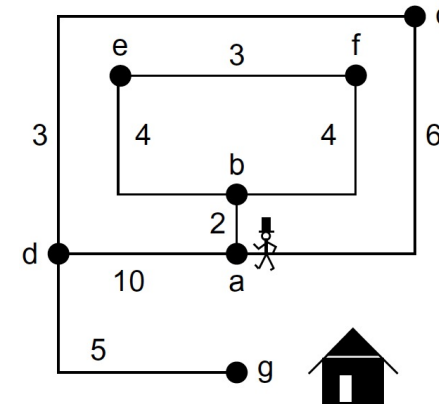
k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

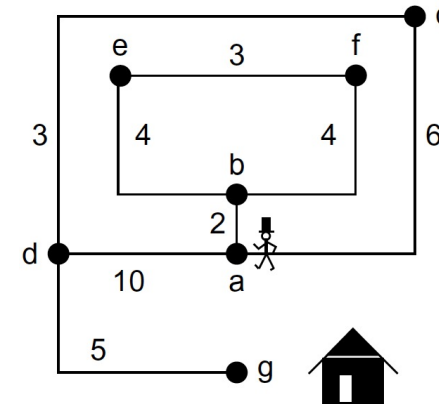
k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



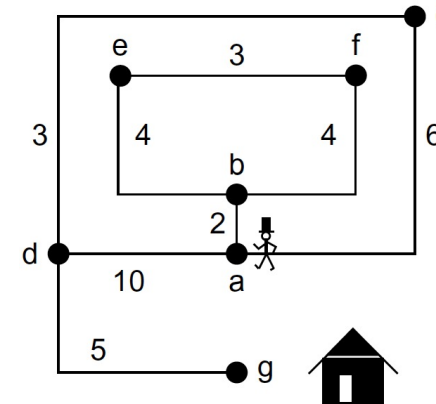
$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



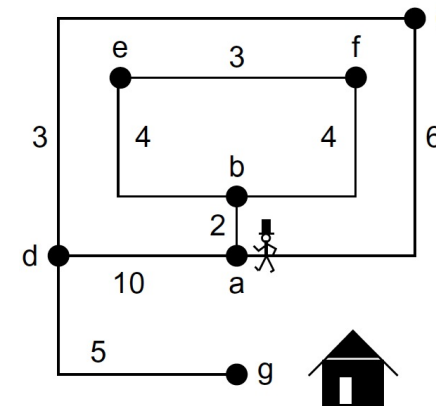
$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

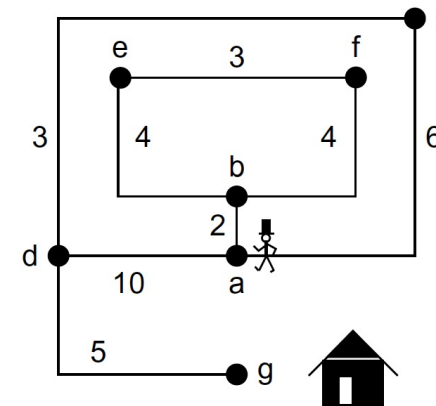
k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

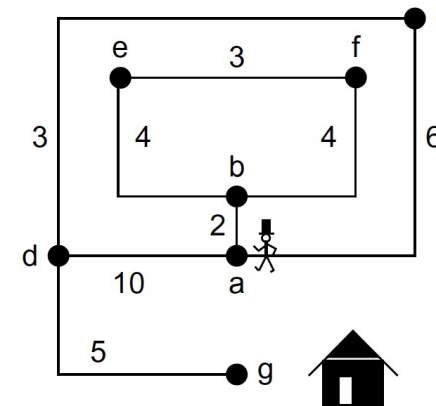
k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

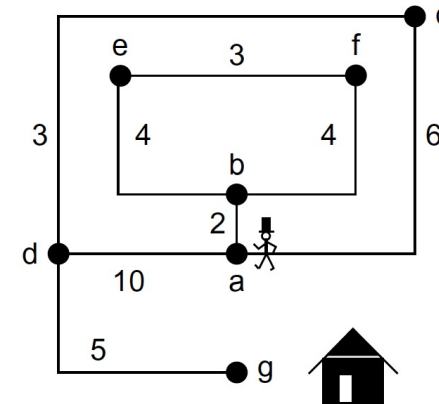
k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=0		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	∞	∞	4	4	∞
	c	6	∞	0	3	∞	∞	∞
	d	10	∞	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

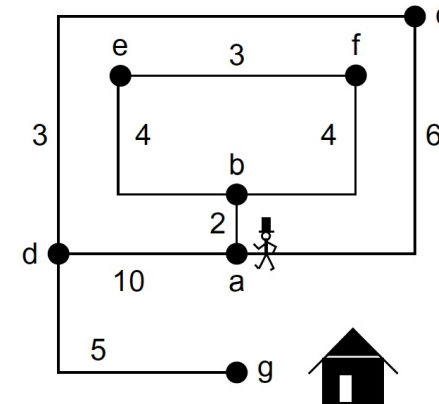
k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

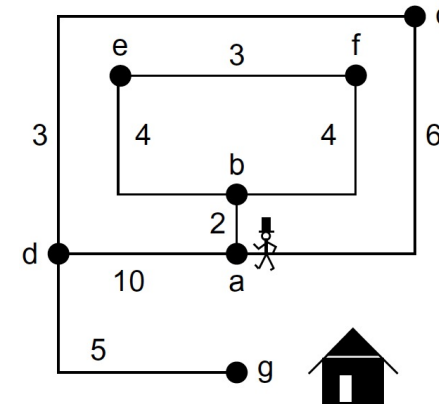
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

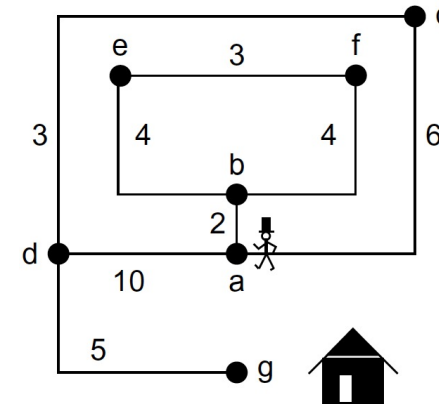
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

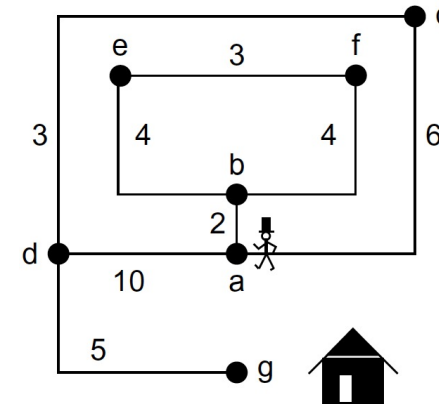
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

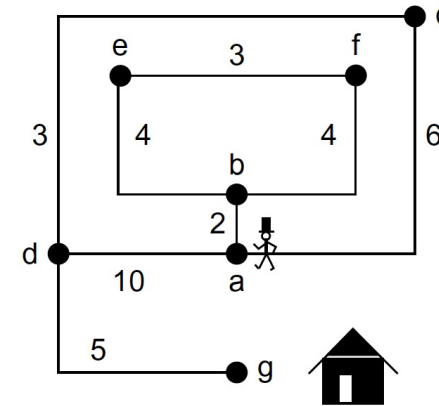
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

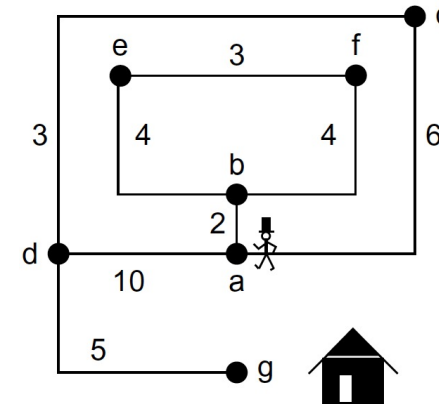
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

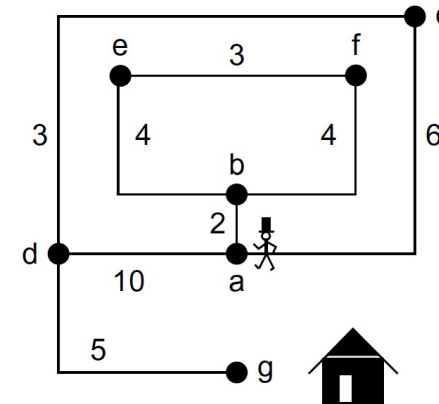
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

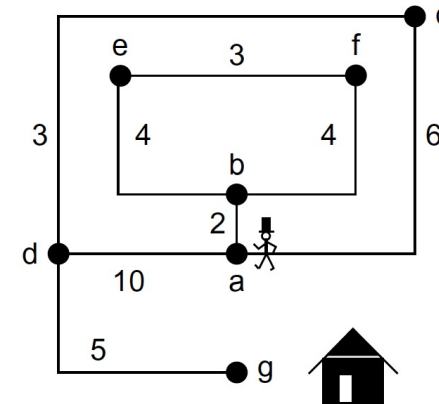
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

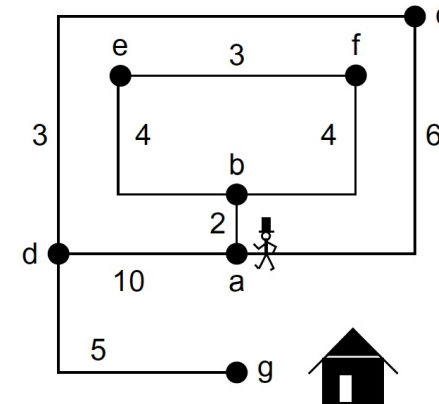
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

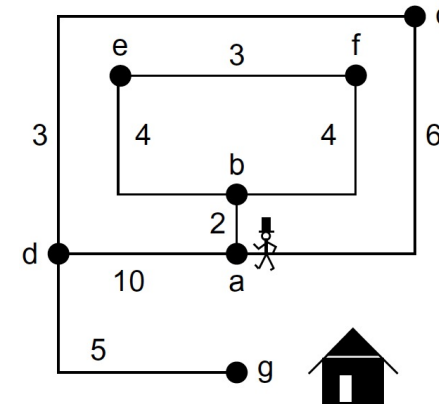
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

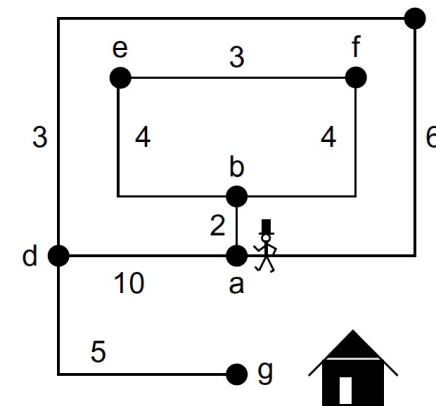
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

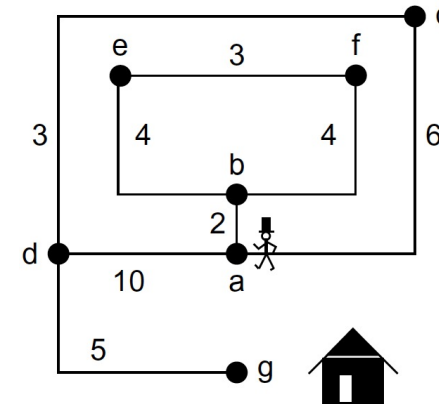
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

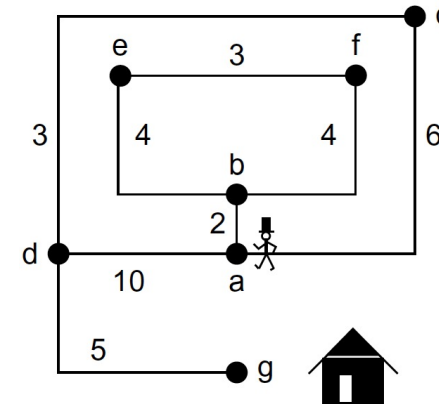
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

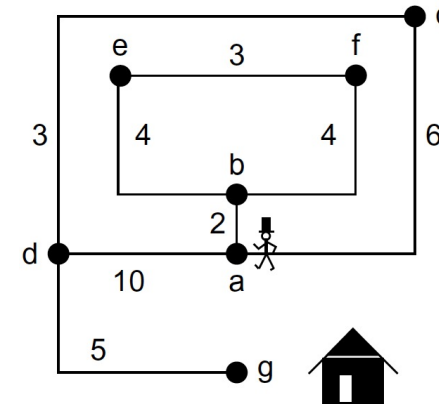
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=1		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	∞	∞	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	∞	∞	∞
	d	10	12	3	0	∞	∞	5
	e	∞	4	∞	∞	0	3	∞
	f	∞	4	∞	∞	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

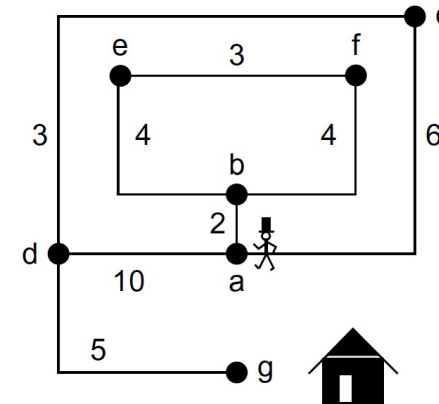
k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

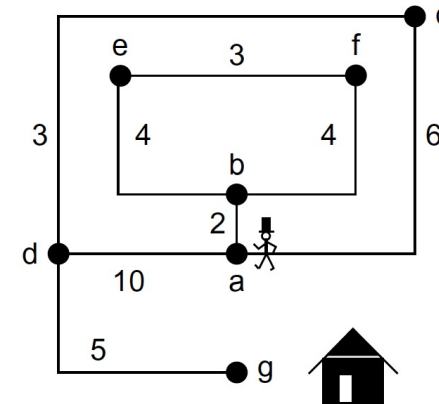
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

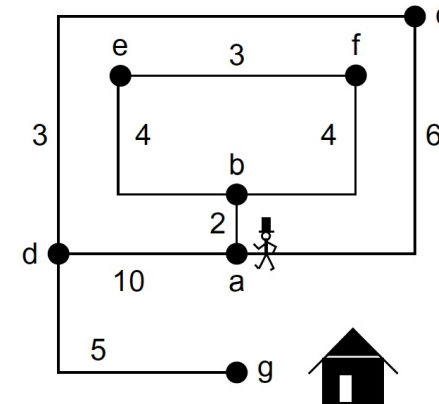
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

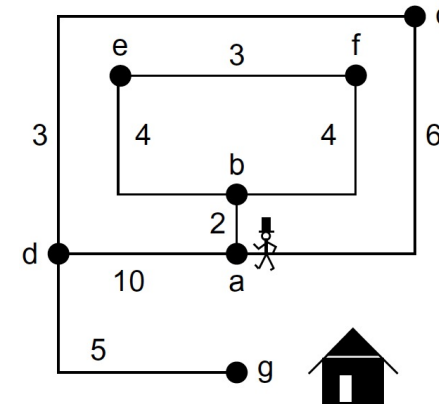
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

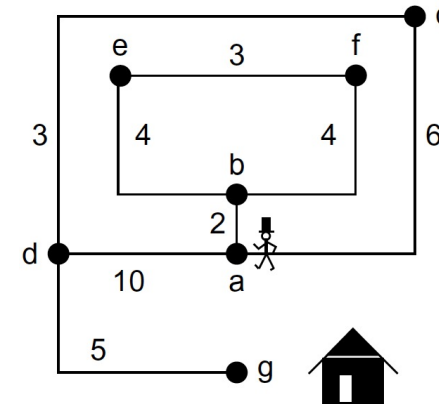
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

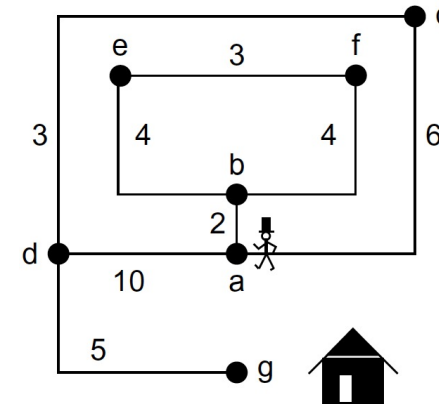
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0

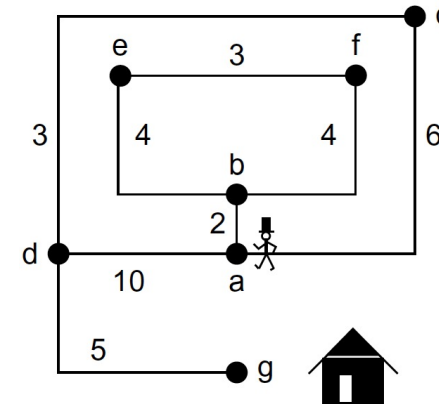
$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

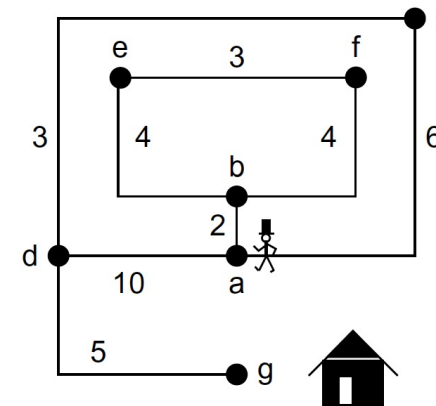
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

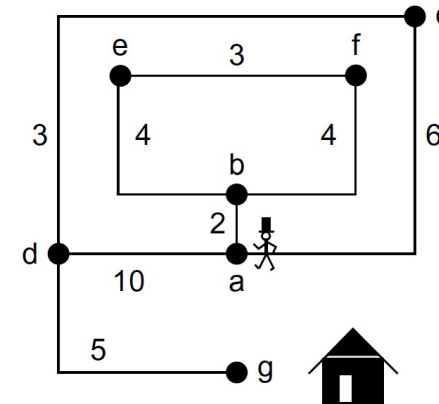
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=2(b)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	10	6	6	∞
	b	2	0	8	12	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	10	12	3	0	16	16	5
	e	6	4	12	16	0	3	∞
	f	6	4	12	16	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

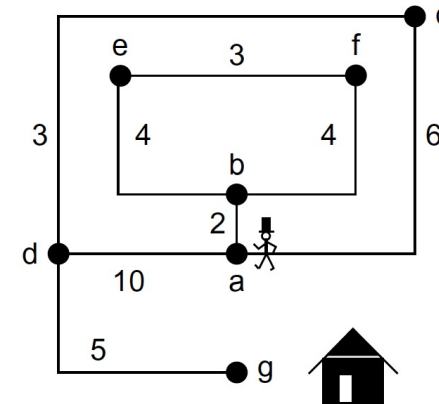
k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

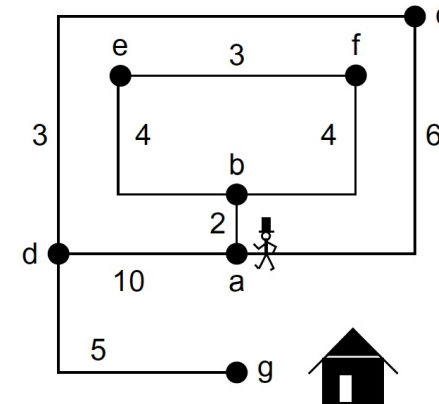
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

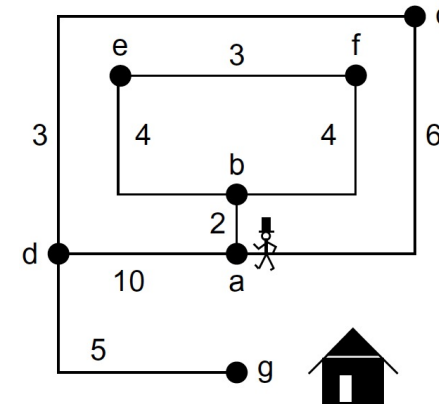
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

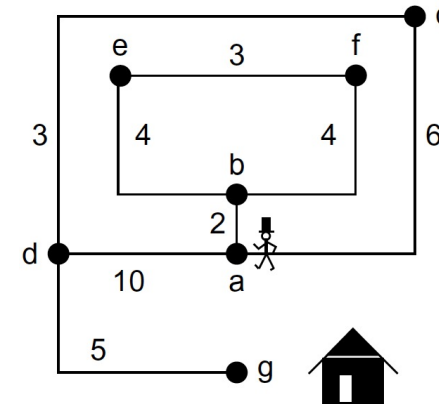
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

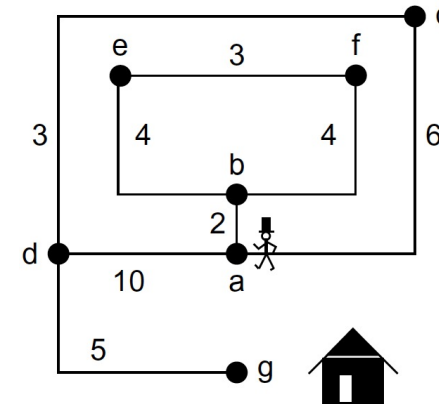
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

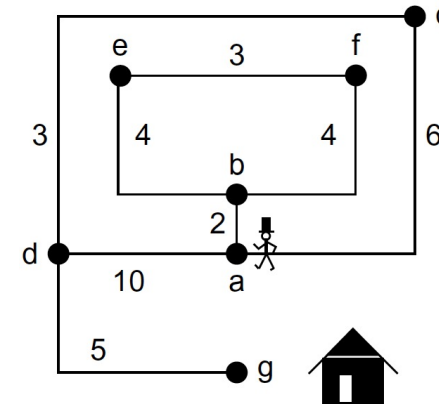
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

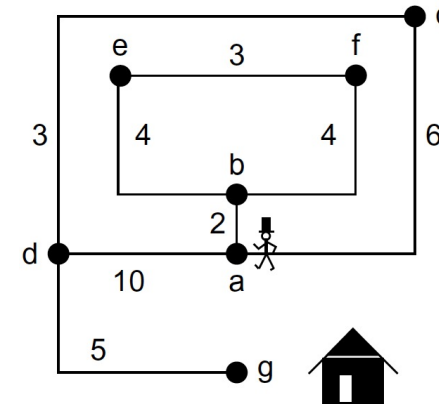
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

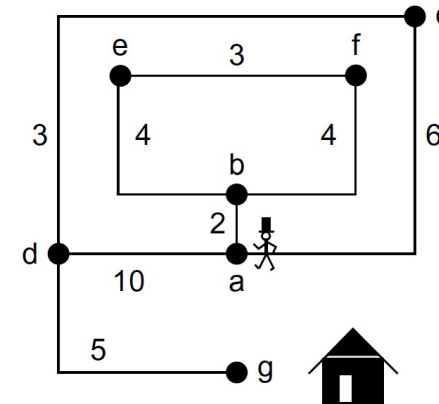
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	∞	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

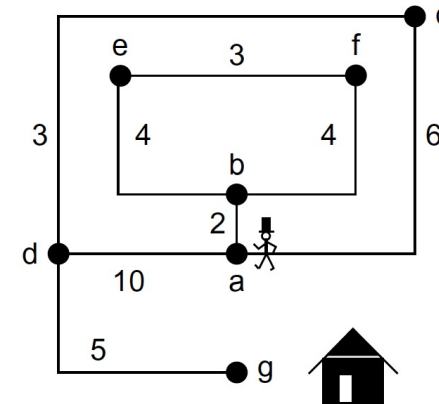
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	16	∞	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

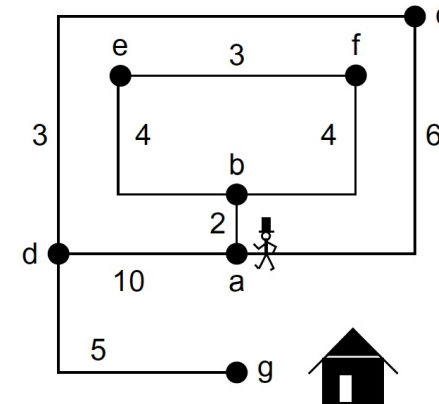
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	16	8	5	∞	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

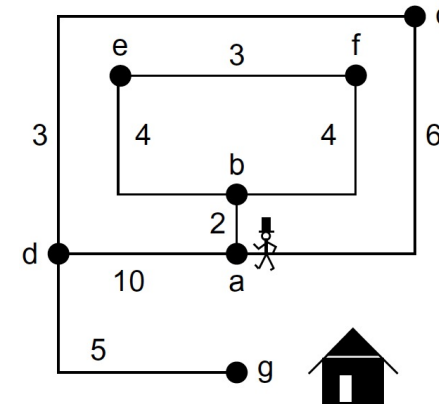
k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	16	8	5	20	∞	0





Dynamic Programming: Shortest Path

k=3(c)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	∞
	b	2	0	8	11	4	4	∞
	c	6	8	0	3	12	12	∞
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	∞
	f	6	4	12	15	3	0	∞
	g	∞	∞	∞	5	∞	∞	0



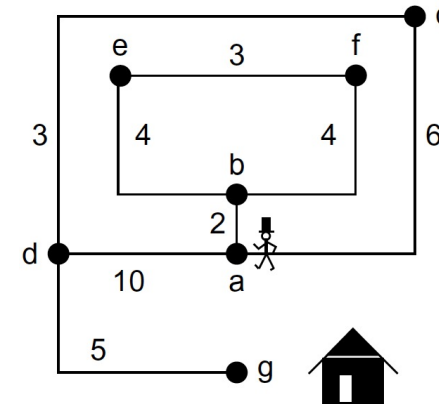
$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	16	8	5	20	20	0



Dynamic Programming: Shortest Path

k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	16	8	5	20	20	0

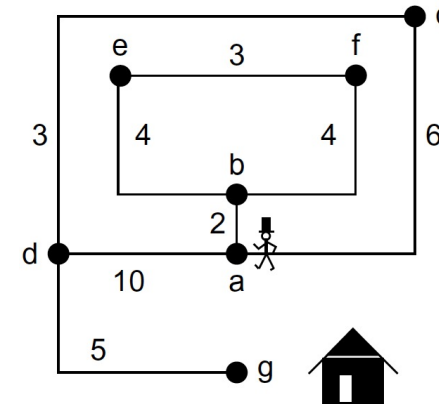


$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

It's the end, e, f and g will not improve any path.

Dynamic Programming: Shortest Path

k=4(d)		j						
		a	b	c	d	e	f	g
i	a	0	2	6	9	6	6	14
	b	2	0	8	11	4	4	16
	c	6	8	0	3	12	12	8
	d	9	11	3	0	15	15	5
	e	6	4	12	15	0	3	20
	f	6	4	12	15	3	0	20
	g	14	16	8	5	20	20	0



$$D_{i,j}^k = \min\{D_{i,j}^{k-1}, D_{i,k}^{k-1} + D_{k,j}^{k-1}\}$$

It's the end, e, f and g will not improve any path.

The complexity is $O(|V|^3)$.